Anwendungsaufgaben zu den quadratischen Funktionen

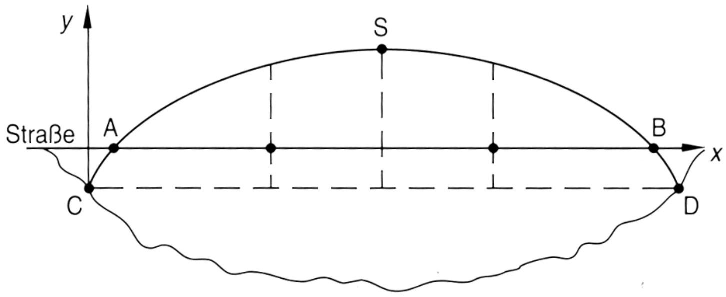
1.0 Der Bogen einer Hängebrücke von der Form einer Parabel verläuft gemäß dem Graphen der Funktion f in untenstehendem Bild: $f(x) = -0{,}004x^2 + 1{,}2x - 32{,}4$.
Die Verankerungspunkte der Brücke liegen unterhalb der durch die x-Achse markierten Straße.

1.1 Berechnen Sie, wie hoch die Brücke ist (Abstand von der Straße).

1.2 Bestimmen Sie die Länge der Straße auf der Brücke ($\overline{AB}$).

1.3 Ermitteln Sie, wie tief unter der Straße sich die Verankerungspunkte der Brücke befinden.

1.4 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Träger durch C und S bzw. D und S.



2.0 Die Kurve eines Wasserstrahls aus einem Gartenschlauch lässt sich durch die Funktion $y = -\frac{1}{20}(x-10)^2 + 6$ beschreiben (Angabe für x und y in Meter).

2.1 Ermitteln Sie die Anfangshöhe des Wasserstrahls.

2.2 Bestimmen Sie in welcher Entfernung der Wasserstrahl wieder auf den Boden trifft.

2.3 Berechnen Sie die maximale Höhe, die der Wasserstrahl erreicht.

3.0 Beim Kugelstoßen bewegt sich die Kugel auf einer parabelförmigen Bahn. Die Bahn hängt von der Geschwindigkeit ab, mit der die Kugel die Hand verlässt, und vom Abstoßwinkel. Bei einem Versuch verlässt die Kugel die Hand am Ort (0/2) und erreicht an der Stelle 5 m mit 4,5 m ihren höchsten Punkt.

3.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Flugkurve.

3.2 Ermitteln Sie, welche Weite bei diesem Versuch erzielt wird.

3.3 Berechnen Sie, nach welcher Strecke die Kugel noch eine Höhe von 1 Meter hat.

4 Die FOS11-Schüler Patrick und Michaela spielen in ihrer Freizeit begeistert Tennis. Die Ballwurfmaschine im Training fasziniert sie. Nachdem sie im Mathematikunterricht erfahren haben, dass die Flugkurve des Balles durch eine Parabel beschrieben werden kann, haben sie einige Messungen vorgenommen. Die Bälle werden aus einer Höhe von 1,05 m „geworfen“, haben nach 4 m Entfernung eine Flughöhe von 1,75 m erreicht und landen nach 14 m auf dem Boden. Die beiden möchten die Maschine so im Tennisfeld platzieren, dass die größte Flughöhe genau über dem Netz erreicht wird. Helfen Sie den beiden, die passende Funktionsgleichung sowie die maximale Flughöhe und die Position der Wurfmaschine zu ermitteln.

5 Die Heilig-Kreuz-Kirche in Gelsenkirchen wurde von Josef Franke in den Jahren 1927 bis 1929 erbaut. Sie wird auch „Parabelkirche“ genannt, da die Parabel das wesentliche architektonische Merkmal der Kirche ist. So beschreibt z.B. auch das Gewölbe des Kircheninnenraumes eine Parabel.
Für ein Schulprojekt soll die Form des Gewölbes durch den Graphen einer Funktion f beschrieben werden. Bei einer Vermessung wird dem Verlauf eines Gewölbebogens ein Koordinatensystem zugrunde gelegt. Dabei wird abgelesen, dass die Punkte P(2/14), Q(4/20) und R(6/18) auf dem Parabelbogen liegen.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f.

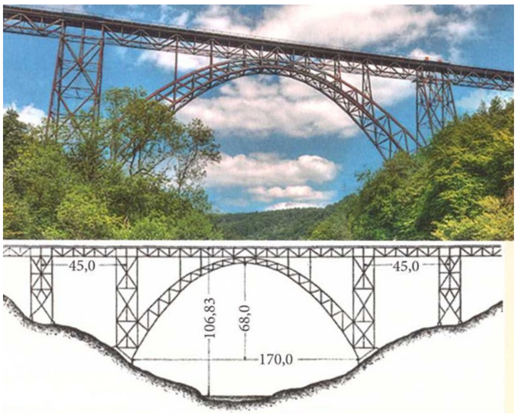
6.0 Im neu eröffneten Erlebnisbad Spaßtherme kostet eine Tageskarte 30 € pro Person. Da die Anzahl der Besucher mit durchschnittlich 500 hinter den Erwartungen geblieben ist, wurde eine Untersuchung erstellt, die Folgendes herausgefunden hat. Eine Reduzierung des Eintrittspreises um je 0,25 € würde die Besucherzahl um je 10 ansteigen lassen.

6.1 Erläutern Sie, warum man die Einnahmen bzw. den Erlös in € durch die Gleichung $E(s) = (30 - 0{,}25s)(500 + 10s)$ angeben kann, wobei s für die Anzahl der Preissenkungen um je 0,25 € steht.

6.2 Die Verwaltung der Spaßtherme möchte wissen, für welchen Eintrittspreis sich die höchsten Einnahmen erzielen lassen.

6.3 Die Verwaltung hat nun festgestellt, dass wichtiger als ein hoher Erlös ein hoher Gewinn ist. Für den ermittelten neuen Preis von 21,75 € pro Person, ergeben sich folgende betriebswirtschaftlichen Größen: Erlösfunktion (in Euro) $E(x) = 21{,}75x$ und Kostenfunktion (in Euro) $K(x) = 0{,}02x^2 - 11{,}5x + 7000$, wobei x die Anzahl der Besucher mit Tageskarte ist.
Ermitteln Sie hierfür die Anzahl an Besuchern, für die sich der höchste Gewinn (= Erlös – Kosten) erzielen lässt.

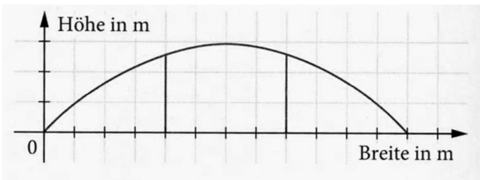
7.0 Die Müngstener Brücke ist die höchste Eisenbahnbrücke Deutschlands. Sie überspannt das Tal der Wupper zwischen Solingen und Remscheid. Der Hauptbogen besteht aus zwei Parabeln.



7.1 Ermitteln Sie mit den Angaben der Konstruktionszeichnung die Funktionsgleichung für den unteren Bogen, indem Sie die x-Achse auf die Höhe der Verankerungspunkte legen.

7.2 Der Abstand der Verankerungspunkte der beiden Bögen beträgt auf jeder Seite 17 m und der Höhenunterschied 8 m. Außerdem liegt der Scheitel des oberen Bogens 5 m über dem des unteren Bogens.
Ermitteln Sie auch die Funktionsgleichung für den oberen Bogen.

8.0 Der parabelförmige Bogen einer Autobrücke kann durch die Funktion mit der Gleichung $f(x) = -0{,}02x^2 + 0{,}96x$ beschrieben werden.



8.1 Übertragen Sie die Zeichnung maßstabsgetreu auf ein kariertes Blatt Papier.

8.2 Berechnen Sie die Spannweite des Brückenbogens und skalieren Sie dazu passend die x-Achse des Koordinatensystems.

8.3 Bestimmen Sie die maximale Höhe des Brückenbogens und skalieren Sie die y-Achse entsprechend.

8.4 Berechnen Sie die Höhe der beiden Stützpfeiler.

8.5 In einem ersten Entwurf für die Brücke waren zwei 9,1 m hohe Stützpfeiler vorgesehen. Diskutieren Sie, an welchen Stellen diese hätten errichtet werden müssen und wie weit sie voneinander entfernt gewesen wären.

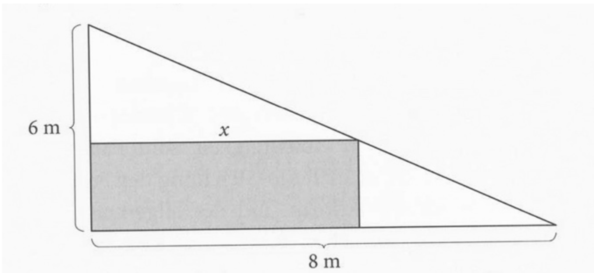
9.0 Der Hersteller eines neuen bruchfesten und biegsamen Handydisplays tritt kurzfristig als Monopolist auf dem Markt auf. Es liegen die Preisabsatzfunktion P mit $P(x)=6-0{,}3x$ sowie die Kostenfunktion K mit $K(x)=0{,}6x+16{,}8$ vor. Dabei stellen x Mengeneinheiten (ME) und K bzw. P Geldeinheiten (GE) dar.

9.1 Geben Sie die Erlösfunktion E und die Gewinnfunktion G an.

9.2 Ermitteln Sie die Erlösschwelle, Erlösgrenze sowie Gewinnschwelle und Gewinngrenze.

9.3 Bestimmen Sie die Ausbringungsmengen, für die maximaler Erlös bzw. maximaler Gewinn erzielt werden.

10.0 Aus einem rechtwinklig dreieckigen Rasenstück (siehe Skizze) soll ein möglichst großes rechtwinkliges Stück eingezäunt werden.

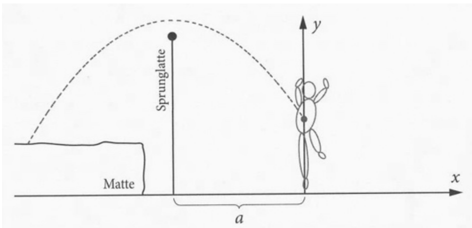


10.1 Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die Variable x an und berechnen Sie ihren Wert so, dass die eingezäunte Fläche größtmöglich ist.
Tipp: Stellen Sie erst die Gleichung der Geraden auf, die die „Hypotenuse enthält“.

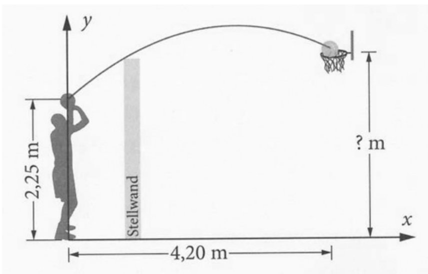
10.2 Bestimmen Sie die Kosten, die entstehen, um das rechteckige Flächenstück vollständig einzuzäunen, wenn der Zaun 6,50 € pro m kostet.

Jochen Weber

11 Durch den Fosbury-Flop wurde der Hochsprung revolutioniert. Der Springer kann seinen Körper in Bezug auf den Körperschwerpunkt kurzzeitig während des Sprungs durch eine starke Hohlkreuzbildung anheben (der Körperschwerpunkt wandert an den Rand des Körpers bzw. sogar leicht darunter).
Im Leichtathletik-Verein versucht sich ein Springer an einer neuen Bestmarke.
Bei seinem Sprungversuch beschreibt der Schwerpunkt S näherungsweise eine parabelförmige Flugbahn mit der Gleichung $y=-0{,}5x^2-1{,}5x+1$.
Die Sprunglatte liegt auf einer Höhe von 1,75 m.
Berechnen Sie, ob der Hochspringer die Sprunglatte überquert, wenn die genau auf der Symmetrieachse der Parabel liegt und der Springer durch den Flop seinen Körperschwerpunkt an den Rand seines Körpers verlegt.
Geben Sie auch den Abstand a an. Die Koordinaten der Punkte im x-y-Koordinatensystem sind Maßzahlen mit der Einheit m.



12.0 Basketballprofi Dirk N. hat von seinem Heimtrainer Holger G. (einem Mathematiker !) die optimale Flugbahn seiner Freiwürfe berechnet bekommen.
Die zugehörige Funktionsgleichung lautet: $f(x)=-0{,}161x^2+0{,}865x+2{,}25;\ x\in\mathbb{R}_0^+$.
Beim Wurf befindet sich der Ball in einer horizontalen Entfernung von 4,2 m vom Ringmittelpunkt. Er wirft den Ball aus ca. 2,25 m Höhe.
Tipp: Gehen Sie davon aus, dass der Ball „von der y-Achse aus“ geworfen wird.

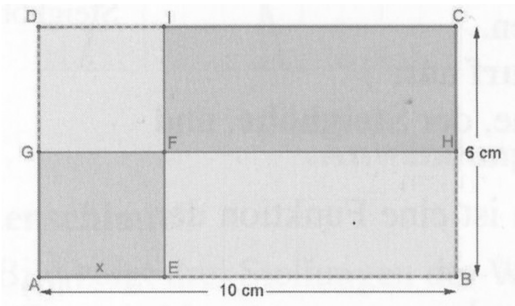


12.1 Berechnen Sie die Höhe des Korbes auf zwei Nachkommastellen gerundet.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit der tatsächlichen Korbhöhe.

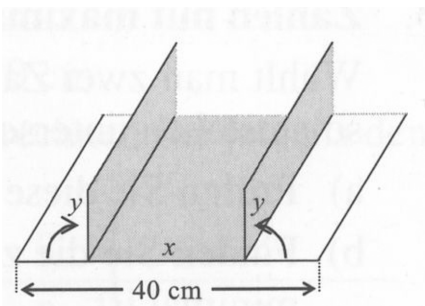
12.2 Um die Trainingsbedingungen zu verschärfen, soll der Spieler „blind“ werfen, d.h. eine 2,9 m hohe Stellwand soll derart aufgebaut werden, dass der Spieler den Korb beim Wurf nicht sieht (siehe Skizze). Zusätzlich soll der Spieler gerade so darüber werfen können (ohne die Flugbahn des Balles zu verändern).
Berechnen Sie den Abstand der Stellwand vom Standort des Spielers, in dem diese gerade noch aufgebaut werden kann und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. Der Ball wird dabei grundsätzlich als „Punkt“ betrachtet.

12.3 Erstellen Sie eigene Funktionsgleichungen für den Spieler für Würfe von (außerhalb) der 3-Punkte-Linie (sowohl für die in Europa als auch in der US-amerikanischen Profiliga NBA gültige Linie).

13 Die Abbildung unten zeigt ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen 10 cm und 6 cm und darin das Quadrat AEFG mit der Seitenlänge x und das Rechteck FHCI.
Die Summe der Flächeninhalte des Quadrats AEFG und des Rechtecks FHCI hängt von der Seitenlänge x des Quadrats ab.
Bestimmen Sie die Seitenlänge x so, dass dieser Flächeninhalt minimal wird und berechnen Sie den minimalen Flächeninhalt.



14 Eine Abflussrinne mit rechteckigem Querschnitt soll aus einem 40 cm breiten Aluminiumblech hergestellt werden. Dabei bedeuten x die Breite der Rinne (in cm) und y die Höhe der Rinne (in cm).
Ermitteln Sie die Maße x, y so, dass ein maximaler Wasserdurchfluss entsteht.



15 Sie absolvieren ein Praktikum in der Verwaltung einer ländlichen Gemeinde. Diese möchte das kulturelle Angebot für ihre Bürgerinnen und Bürger erhöhen und beschließt daher, monatlich in einem stillgelegten Bergwerkstollen ein mittelalterliches Ritteressen zu veranstalten. Doch bevor dieses Vorhaben in die Tat umgesetzt werden kann, muss es sorgfältig geplant werden. An dieser Planung sind Sie beteiligt. Ihnen stehen einerseits Angaben über den Stollen sowie genauere Informationen über das geplante Vorhaben zur Verfügung.

Angaben zum Stollen:

Der Stollen hat über seine gesamte Länge einen symmetrischen, parabelförmigen Querschnitt. Der höchste Punkt des Stollens ist fünf Meter hoch und am Boden sechs Meter breit (Abbildung 1). Insgesamt hat der Stollenabschnitt, der genutzt werden soll, eine Länge von zehn Meter.

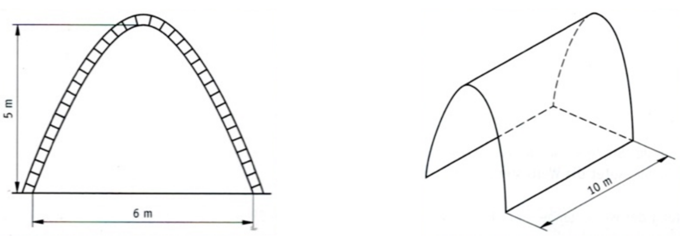


Abbildung 1: Angaben zu den Abmessungen des Tunnels

Detailinformationen zum Vorhaben des Gemeinderats (Abbildung 2)**:**

Es ist geplant, dass in der Mitte des Stollens eine 7 m lange Tafel errichtet wird, an der rechts und links die Gäste Platz nehmen können.

Auf der gegenüberliegenden Seite des Eingangs ist als Abschluss eine Holzbühne in einer Höhe von 2 m geplant, auf der Musiker auftreten können. Unterhalb dieser Holzbühne sollen das Essen und die Getränke gelagert werden.

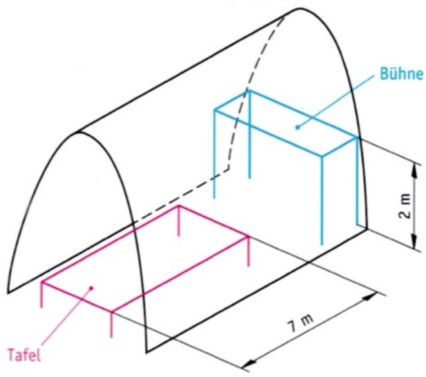
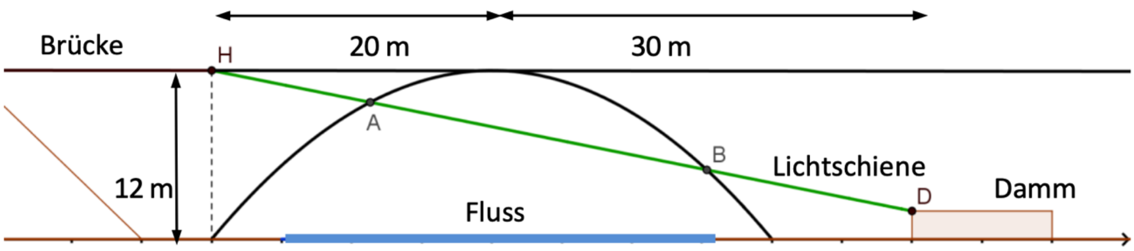


Abbildung 2: Detailplanung des Gemeinderats

Ihre Aufgaben:

- Berechnen Sie die maximale Breite der Bühne.
- Damit sich niemand den Kopf an der Stollenwand anstößt, dürfen nur Bereiche des Stollens betreten werden, die eine Höhe von mindestens 2,20 m haben (Gästebereich). Bereiche, an denen der Stollen nicht diese Höhe besitzt, dürfen von den Gästen nicht betreten werden (Sperrbereich) und sollen abgesperrt werden. Berechnen Sie jeweils die Breite des Sperrbereichs.
- Entlang der zehn Meter langen Stollenwand soll jeweils links und rechts eine Schiene für Strahler zur Beleuchtung des Raumes montiert werden. Diese sollen symmetrisch zur Mitte des Raumes in einem Abstand von drei Metern an die Stollenwand angebracht werden. Berechnen Sie, in welcher Höhe über dem Boden sich diese dann befinden.

16.0 Auf der Donauinsel in Regensburg soll ein zweitägiges Musikfestival stattfinden. Sie sind als Veranstaltungstechniker für den Bühnenaufbau verantwortlich. Ein großes Floß auf der Donau soll als Bühne verwendet werden. Damit das Festival mit einer Webcam übertragen werden kann, soll eine Schiene mit Lichtstrahlern zwischen dem Punkt H und dem Punkt D an der Kante des Dammes befestigt werden.
Der Damm ist 2 Meter hoch und befindet sich 15 Meter neben dem rechten Flussufer. Die Donau hat an dieser Stelle eine Breite von 30 Metern. Als weitere Befestigungspunkte für die Lichtschiene dienen die Punkte A und B an der parabelförmigen Stahlkonstruktion der Brücke. Der Scheitelpunkt der Parabel liegt genau über der Flussmitte. Alle Daten können der nachfolgenden, nicht maßstabsgetreuen Skizze entnommen werden.



Damit das Befestigen der Lichtschiene an der Brücke schnell und unkompliziert durchgeführt werden kann, müssen die Halterungen an Brücke und Schiene bereits vorinstalliert werden.
(illustrierende Aufgabe zum LehrplanPLUS)

16.1 Bestimmen Sie die exakten Positionen, an denen die Befestigungselemente an der Brücke und an der Lichtschiene angebracht werden müssen.

16.2 Ermitteln Sie die maximale Durchfahrtshöhe eines Binnenschiffes mit der Breite 9,5 m, wenn vom Ufer ein Sicherheitsabstand von 4 m einzuhalten ist und die Fahrrinne möglichst nahe am linken Ufer sein soll.

Lösungen

1.1 Berechnung der Höhe der Brücke:

Berechnung des Scheitels:

$$x_S = -\frac{1{,}2}{2\cdot(-0{,}004)} = 150 \qquad y_S = -0{,}004\cdot 150^2 + 1{,}2\cdot 150 - 32{,}4 = 57{,}6$$

Der Abstand von der Straße beträgt 57,6 m und die Höhe der gesamten Brücke beträgt 57,6 m + 32,4 m = 90 m.

1.2 Berechnung der Nullstellen der Parabel:

$$-0{,}004x^2 + 1{,}2x - 32{,}4 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1{,}2 \pm \sqrt{1{,}44 - 4\cdot(-0{,}004)\cdot(-32{,}4)}}{-0{,}008} = \frac{-1{,}2 \pm \sqrt{0{,}9216}}{-0{,}008} =$$

$$\frac{-1{,}2 \pm 0{,}96}{-0{,}008} \qquad x_1 = 270 \qquad x_2 = 30$$

Die Länge der Straße ($\overline{AB}$) beträgt 270 m – 30 m = 240 m.

1.3 Die Verankerungspunkte der Brücke befinden sich 32,4 m unterhalb der Straße.

1.4 Berechnung der Geraden durch die Punkte C(0/-32,4) und S(150/57,6):

$$y = mx + t \qquad m = \frac{57{,}6 - (-32{,}4)}{150 - 0} = \frac{90}{150} = 0{,}6 \quad y = 0{,}6x + t$$

$$C(0/-32{,}4)\text{ einsetzen}: \Rightarrow -32{,}4 = 0{,}6\cdot 0 + t \Rightarrow t = -32{,}4$$

$$\Rightarrow y = 0{,}6x - 32{,}4$$

Berechnung der Geraden durch die Punkte D und S:
Steigung der Geraden muss m = -0,6 sein, da die Punkte C und D symmetrisch zum Scheitel S liegen.

$$y = -0{,}6x + t$$

$$S(150/57{,}6)\text{ einsetzen}:\ 57{,}6 = -0{,}6\cdot 150 + t \Rightarrow t = 147{,}6$$

$$y = -0{,}6x + 147{,}6$$

2.1

$$x = v_A t \Rightarrow t = \frac{x}{v_A}$$

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_A}\right)^2 = h - \frac{g}{2v_A^{\ 2}}\cdot x^2$$

2.1 $y=-\frac{1}{20}(0-10)^2+6=1$

Die Anfangshöhe des Wasserstrahl beträgt 1 Meter.

2.2

$$-\frac{1}{20}(x-10)^2+6=0 \quad \Rightarrow (x-10)^2=120 \quad \Rightarrow x-10=\pm\sqrt{120}$$

$$\Rightarrow (x_1=-\sqrt{120}+10\approx-0{,}95) \qquad x_2=\sqrt{120}+10\approx 20{,}95$$

Der Wasserstrahl trifft in einer Entfernung von 20,95 m wieder auf den Boden.

2.3 Aus der Scheitelgleichung folgt $S(10/6)$.

Die maximale Höhe, die der Wasserstrahl erreicht, beträgt 6 m.

3.1

$y=a\cdot(x-5)^2+4{,}5$

Punkt P(0/2) einsetzen:

$$2=a\cdot(0-5)^2+4{,}5 \quad \Rightarrow 2=25a+4{,}5 \quad \Rightarrow 25a=-2{,}5 \quad \Rightarrow a=-0{,}1$$

$$\Rightarrow y=-0{,}1\cdot(x-5)^2+4{,}5=-0{,}1\cdot(x^2-10x+25)+4{,}5=-0{,}1x^2+x+2$$

3.2

$$-0{,}1x^2+x+2=0 \quad \Rightarrow x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-0{,}1)\cdot 2}}{2\cdot(-0{,}1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1{,}8}}{-0{,}2}$$

$$\Rightarrow (x_1\approx-1{,}71) \qquad x_2\approx 11{,}71$$

Bei diesem Versuch wird eine Weite von 11,71 m erzielt.

3.3

$$-0{,}1x^2+x+2=1 \quad \Rightarrow -0{,}1x^2+x+1=0$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-0{,}1)\cdot 1}}{2\cdot(-0{,}1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1{,}4}}{-0{,}2}$$

$$\Rightarrow (x_1\approx-0{,}92) \qquad x_2\approx 10{,}92$$

Die Kugel hat nach 10,92 m noch eine Höhe von 1 m.

4.

$p(x) = ax^2 + bx + c$

(I) $p(0) = 1{,}05 \quad \Rightarrow c = 1{,}05$

(II) $p(4) = 1{,}75 \quad \Rightarrow 16a + 4b + 1{,}05 = 1{,}75 \quad \Rightarrow 16a + 4b = 0{,}7$

(III) $p(14) = 0 \quad \Rightarrow 196a + 14b + 1{,}05 = 0 \quad \Rightarrow 196a + 14b = -1{,}05$

(II) $\Rightarrow b = 0{,}175 - 4a$

(I) $\Rightarrow 196a + 14(0{,}175 - 4a) = -1{,}05 \quad \Rightarrow 140a = -3{,}5 \quad \Rightarrow a = -0{,}025$

$\Rightarrow b = 0{,}175 - 4(-0{,}025) = 0{,}275$

$\Rightarrow p(x) = -0{,}025x^2 + 0{,}275x + 1{,}05$

$x_S = -\frac{0{,}275}{2(-0{,}025)} = 5{,}5 \quad y_S = 1{,}8$

Die maximale Flughöhe beträgt 1,8 m.

Die Wurfmaschine sollte 5,5 m vom Netz entfernt stehen.

5.

$p(x) = ax^2 + bx + c$

(I) $p(2) = 14 \quad \Rightarrow 4a + 2b + c = 14$

(II) $p(4) = 20 \quad \Rightarrow 16a + 4b + c = 20$

(III) $p(6) = 18 \quad \Rightarrow 36a + 6b + c = 18$

(II) − (I) $\Rightarrow 12a + 2b = 6$ (IV)

(III) − (I) $\Rightarrow 32a + 4b = 4$ (V)

(IV) $\Rightarrow b = 3 - 6a$

(V) $\Rightarrow 32a + 4(3 - 6a) = 4 \quad 8a = -8 \quad \Rightarrow a = -1$

$\Rightarrow b = 3 - 6 \cdot (-1) = 9$

(I) $\Rightarrow 4 \cdot \left(-1\right) + 2 \cdot 9 + c = 14 \quad \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow p(x) = -x^2 + 9x$

6.1

Erlös = Eintrittspreis · Anzahl Besucher

Eintrittspreis in Abhängigkeit der Anzahl der Preissenkungen: $30 - 0{,}25s$

Anzahl Besucher in Abhängigkeit der Anzahl der Preissenkungen: $500 + 10s$

6.2

$E(s) = -2{,}5s^2 + 175s + 15000$

$s_S = -\frac{175}{2(-2{,}5)} = 35$

Für einen Eintrittspreis von $30\text{-}0{,}25 \cdot 35 = 21{,}25$ €

lassen sich die höchsten Einnahmen erzielen.

6.3

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}02x^2 + 33{,}25x - 7000$ (nach unten geöffnete Parabel)

$x_S = -\dfrac{33{,}25}{2(-0{,}02)} = 831{,}25$

Der höchste Gewinn lässt sich für eine Besucheranzahl von etwa 831 erzielen.

7.1

$p(x) = a(x-85)^2 + 68$

$P(0/0)$ einsetzen (Ursprung des KOS liegt im linken Verankerungspunkt)

$\Rightarrow a(0-85)^2 + 68 = 0 \quad \Rightarrow 7225a = -68 \quad \Rightarrow a = -\dfrac{4}{425}$

$\Rightarrow p(x) = -\dfrac{4}{425}(x-85)^2 + 68$

7.2

$p(x) = a(x-85)^2 + 73$

$P(-17/8)$ einsetzen:

$a(-17-85)^2 + 73 = 8 \quad \Rightarrow 10404a = -65 \quad \Rightarrow a = -\dfrac{65}{10404}$

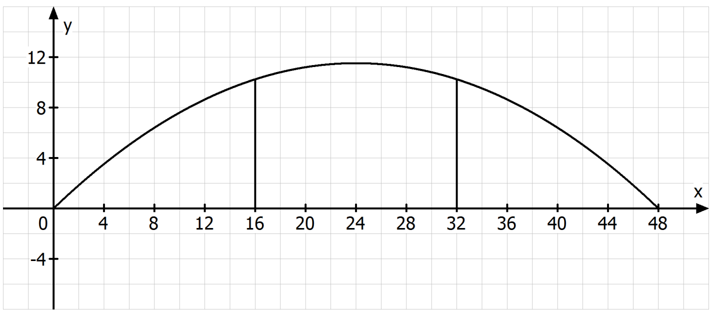
$\Rightarrow p(x) = -\dfrac{65}{10404}(x-85)^2 + 73$

8.2 $-0{,}02x^2 + 0{,}96x = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 48$

8.3

$x_S = -\dfrac{0{,}96}{2(-0{,}02)} = 24$

$y_S = -0{,}02 \cdot 24^2 + 0{,}96 \cdot 24 = 11{,}52\text{m}$



8.4

$-0{,}02 \cdot 16^2 + 0{,}96 \cdot 16 = 10{,}24$

Die Höhe der beiden Stützpfeiler beträgt 10,24 m.

8.5

$-0{,}02x^2+0{,}96x=9{,}1 \quad \Rightarrow -0{,}02x^2+0{,}96x-9{,}1=0$

$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{-0{,}96\pm\sqrt{0{,}9216-4(-0{,}02)(-9{,}1)}}{-0{,}04}=\frac{-0{,}96\pm\sqrt{0{,}1936}}{-0{,}04}=\frac{-0{,}96\pm0{,}44}{-0{,}04}$

$x_1=13 \qquad x_2=35$

Die Stützen wären dann 22 Meter voneinander entfernt gewesen.

9.1

$\text{Erlös}=\text{Preis}\cdot\text{Stückzahl} \quad \Rightarrow E(x)=\left(6-0{,}3x\right)\cdot x=-0{,}3x^2+6x$

$\text{Gewinn}=\text{Erlös}-\text{Kosten} \quad \Rightarrow G(x)=-0{,}3x^2+6x-\left(0{,}6x+16{,}8\right)=-0{,}3x^2+5{,}4x-16{,}8$

9.2

$E(x)=0 \quad \Rightarrow -0{,}3x^2+6x=0 \quad \Rightarrow x(-0{,}3x+6)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=20$

Skizze von E:

$\Rightarrow$ Erlösschwelle bei 0 und die Erlösgrenze bei 20

$G(x)=0 \quad \Rightarrow -0{,}3x^2+5{,}4x-16{,}8=0 \quad \Rightarrow x_1=4 \quad x_2=14$

$\Rightarrow$ Gewinnschwelle bei 4 un ddie Gewinngrenze bei 14

9.3

Beide Graphen der Erlös- und Gewinnfunktion sind nach unten geöffnete Parabeln, d.h. der höchste Punkt ist jeweils der Scheitelpunkt.

Erlösfunktion: $x_S=-\frac{6}{2\cdot(-0{,}3)}=10 \qquad E(10)=30$

Bei einer Ausbringungsmenge von 10 ME liegt mit 30 GE der größte Erlös vor.

Gewinnfunktion: $x_S=-\frac{5{,}4}{2\cdot(-0{,}3)}=9 \qquad G(9)=7{,}5$

Bei einer Ausbringung von 9 ME liegt der größte Gewinn von 7,5 GE vor.

10.1

$P_1(0/6) \quad P_2(8/0)$

$m=\frac{6-0}{0-8}=-0{,}75$

$\Rightarrow y=-0{,}75x+6$

$A(x)=x\cdot\left(-0{,}75x+6\right)=-0{,}75x^2+6x \qquad D_A=\left]0;8\right[$

Größtmöglicher Wert für x liegt beim Scheitel, weil G_A eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$x_S=-\frac{6}{2(-0{,}75)}=4$

10.2

$$U_{Rechteck} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-0,75 \cdot 4 + 6) = 14\text{m}$$

Kosten: $14 \cdot 6,50 = 91$ €

11.

$$x_S = -\frac{-1,5}{2(-0,5)} = -1,5$$

$$y_S = -0,5(-1,5)^2 - 1,5(-1,5) + 1 = 2,125$$

Der Hochspringer überquert die Latte.

Abstand a beträgt 1,5 m.

12.1

$$-0,161 \cdot (4,20)^2 + 0,865 \cdot 4,20 + 2,25 \approx 3,04$$

Die tatsächliche Korbhöhe beträgt 3,05 m.

12.2

$$-0,161x^2 + 0,865x + 2,25 = 2,9 \quad \Rightarrow -0,161x^2 + 0,865x - 0,65 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-0,865 \pm \sqrt{0,748225 - 4(-0,161)(-0,65)}}{-0,322} = \frac{-0,865 \pm 0,57}{-0,322}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0,92 \qquad x_2 = 4,46$$

Die Stellwand muss 0,92 m vom Spieler entfernt stehen.

12.3

Europa: 6,75m

$$p(x) = ax^2 + bx + 2,25$$

$$\text{(I)}\ p(6,75) = 3,05 \quad \Rightarrow 45,5625a + 6,75b + 2,25 = 3,05 \quad \Rightarrow 45,5625a + 6,75b = 0,8$$

$$\text{(II)}\ p(1) = 3 \quad \Rightarrow a + b + 2,25 = 3 \quad \Rightarrow a + b = 0,75$$

$$\text{(II)} \Rightarrow a = 0,75 - b$$

$$\text{(I)} \Rightarrow 45,5625(0,75 - b) + 6,75b = 0,8 \quad \Rightarrow -38,8125b = -33,3719875 \quad \Rightarrow b = 0,86$$

$$\Rightarrow a = 0,75 - 0,86 = -0,11$$

$$\Rightarrow p(x) = -0,11x^2 + 0,86x + 2,25$$

NBA: 7,25m

$$p(x) = ax^2 + bx + 2,25$$

$$\text{(I)}\ p(7,25) = 3,05 \quad \Rightarrow 52,5625a + 7,25b + 2,25 = 3,05 \quad \Rightarrow 52,5625a + 7,25b = 0,8$$

$$\text{(II)}\ p(1) = 3 \quad \Rightarrow a + b + 2,25 = 3 \quad \Rightarrow a + b = 0,75$$

$$\text{(II)} \Rightarrow a = 0,75 - b$$

$$\text{(I)} \Rightarrow 52,5625(0,75 - b) + 7,25b = 0,8 \quad \Rightarrow -45,3125b = -38,621875 \quad \Rightarrow b = 0,852$$

$$\Rightarrow a = 0,75 - 0,852 = -0,102$$

$$\Rightarrow p(x) = -0,102x^2 + 0,852x + 2,25$$

13

$A = A_{AEFG} + A_{FHCI}$

$\Rightarrow A(x) = x^2 + (10-x)\cdot(6-x) = x^2 + x^2 - 16x + 60 = 2x^2 - 16x + 60$

G_A ist eine nach oben geöffnete Parabel $\Rightarrow$ Minimum liegt beim Scheitel

$x_S = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow x_s = -\frac{-16}{2\cdot 2} = 4 \qquad y_S = 2\cdot 4^2 - 16\cdot 4 + 60 = 28$

Der Flächeninhalt wird für x = 4 minimal und nimmt den Wert 28 annimmt.

14

$A = x\cdot y \qquad 2y + x = 40 \quad \Rightarrow y = 20 - \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow A(x) = x\cdot\left(20 - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 20x$

G_A ist eine nach unten geöffnete Parabel $\Rightarrow$ Maximum liegt beim Scheitel

$\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow x_S = -\frac{20}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 20 \qquad \Rightarrow y = 20 - \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$

15

Aufstellen der Parabel p: x Breite in Meter und y die Höhe in Meter

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die y-Achse

die Symmetrieachse der Parabel ist. $S(0|5)$ $P(3|0)$

$p(x) = a \cdot (x-0)^2 + 5 = ax^2 + 5$

$P \Rightarrow 0 = a \cdot 3^2 + 5 \quad \Rightarrow 0 = 9a + 5 \quad \Rightarrow a = -\frac{5}{9}$

$\Rightarrow p(x) = -\frac{5}{9}x^2 + 5$

Maximale Breite der Bühne:

$2 = -\frac{5}{9}x^2 + 5 \quad \Rightarrow -\frac{5}{9}x^2 = -3 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{27}{5}$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{27}{5}} \approx -2{,}32 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{27}{5}} \approx 2{,}32$

$\Rightarrow$ maximale Breite des Bühne: $2{,}32 - (-2{,}32) = 4{,}64\,\text{m}$

Sperrbereich (Gästebereich):

$2{,}20 = -\frac{5}{9}x^2 + 5 \quad \Rightarrow -\frac{5}{9}x^2 = -2{,}8 \quad \Rightarrow x^2 = 5{,}04$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{5{,}04} \approx -2{,}24 \qquad x_2 = \sqrt{5{,}04} \approx 2{,}24$

$\Rightarrow$ Sperrbereich auf beiden Seiten: $3 - 2{,}24 = 0{,}76\,\text{m}$

Zusatz (ist nach Aufgabenstellung nicht verlangt):

Sperrbereich Bühne:

$4{,}2 = -\frac{5}{9}x^2 + 5 \quad \Rightarrow -\frac{5}{9}x^2 = -0{,}8 \quad \Rightarrow x^2 = 1{,}44$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{1{,}44} = -1{,}2 \qquad x_2 = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

$\Rightarrow$ Sperrbereich Bühne auf beiden Seiten: $2{,}32 - 1{,}2 = 1{,}12\,\text{m}$

Höhe der Strahler:

$p(1{,}5) = -\frac{5}{9} \cdot 1{,}5^2 + 5 = 3{,}75\,\text{m}$

16.1

Koordinatensystem wählen, z.B. Ursprung in der Flussmitte

Gleichung der Parabel aufstellen:

$p(x) = ax^2 + 12 \qquad P(20|0)$

$\Rightarrow 0 = 400a + 12 \quad \Rightarrow a = -0{,}03$

$\Rightarrow p(x) = -0{,}03x^2 + 12$

Gerade aufstellen durch $H(-20|12)$ und $D(30|2)$:

$g(x) = mx + t \qquad m = \dfrac{12-2}{-20-30} = -0{,}2 \quad \Rightarrow g(x) = -0{,}2x + t$

D einsetzen: $\Rightarrow 2 = -0{,}2 \cdot 30 + t \quad \Rightarrow t = 8$

$\Rightarrow g(x) = -0{,}2x + 8$

$p(x) = g(x) \quad \Rightarrow -0{,}03x^2 + 12 = -0{,}2x + 8$

$\Rightarrow -0{,}03x^2 + 0{,}2x + 4 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -8{,}685 \qquad x_2 = 15{,}352$

$\Rightarrow y_1 = -0{,}2 \cdot (-8{,}685) + 8 = 9{,}737 \qquad \Rightarrow A(-8{,}685|9{,}737)$

$\Rightarrow y_2 = -0{,}2 \cdot (15{,}352) + 8 = 4{,}9296 \qquad \Rightarrow B(15{,}352|4{,}9296)$

Position Brücke: $A(-8{,}685|9{,}737) \qquad B(15{,}352|4{,}9296)$ (mit Referenzpunkt Flussmitte)

Position auf der Lichtschiene:

$d(H;A) = \sqrt{(-20-(-8{,}685))^2 + (12-9{,}737)^2} \approx 11{,}539$

$d(D;B) = \sqrt{(30-15{,}352)^2 + (2-4{,}9296)^2} \approx 14{,}938$

$\Rightarrow$ 11,539 m von H aus gemessen und 14,938 m von B aus gemessen müssen
auf der Lichtschiene die Befestigungselemente angebracht werden.

16.2

Höhe der Lichtschiene über der rechten Bordwand: $-15 + 4 + 9{,}50 = -1{,}5$

$g(-1{,}5) = -0{,}2 \cdot 1{,}5 + 8 = 8{,}30\,\text{m}$

$\Rightarrow$ maximale Durchfahrtshöhe 8,30 m